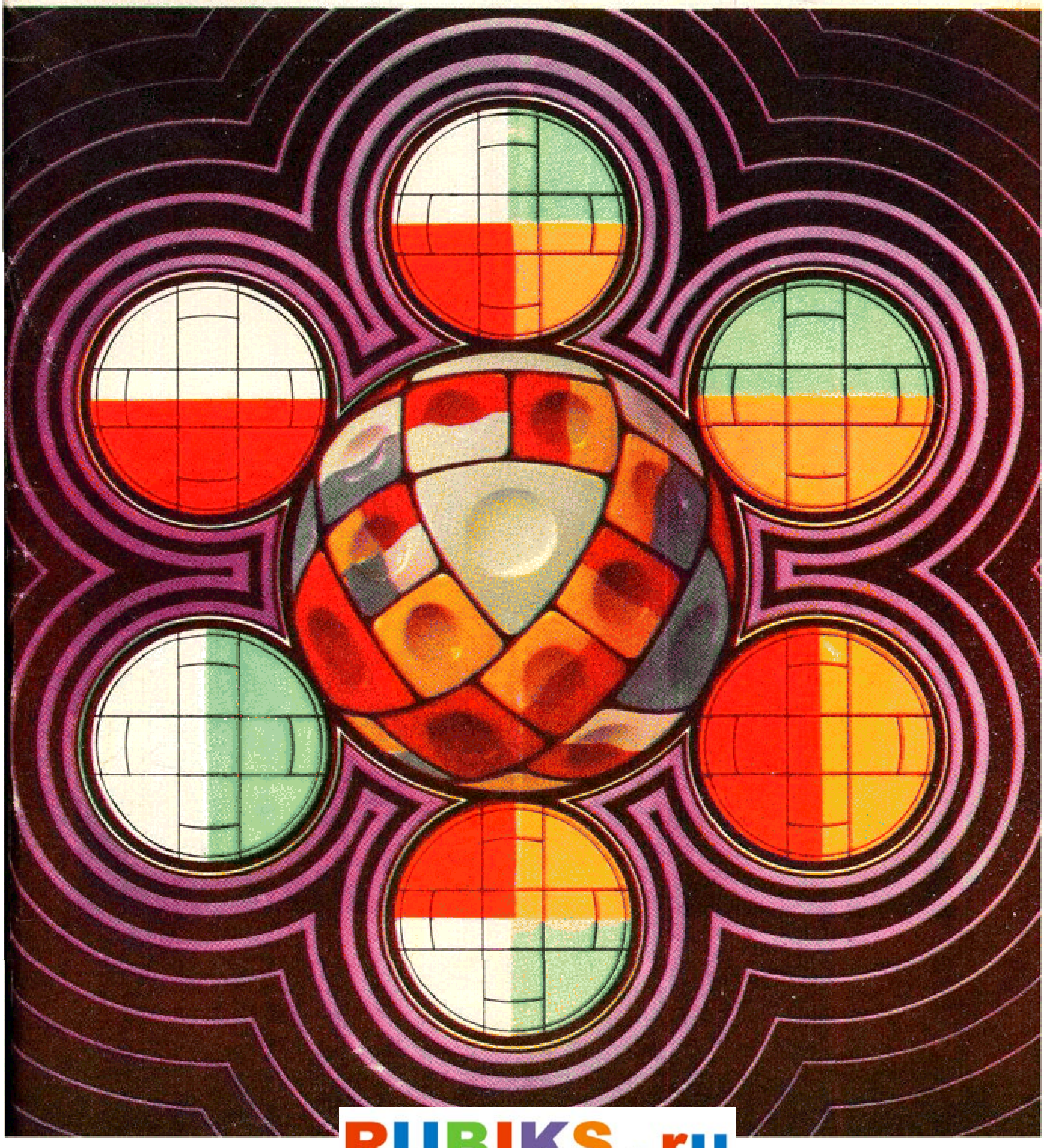
ISSN 0130-2221

Квант

7
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



В. Дубровский

Алгоритм волшебного кубика

Непросто справиться с «венгерским волшебным кубиком» — самой популярной головоломкой XX века. Поэтому нетерпеливые люди, потеряв надежду на успех, зачастую прекращают свое знакомство с ним разламывая его на кусочки. Говорят, что после появления «кубика» в Японии даже понизилась производительность труда, а в США эту игрушку сейчас продают в комплекте с пластмассовым топориком: не сумел решить — ломай!

«Квант» относится к кубику Рубика более спокойно и серьезно, о чем свидетельствует публикуемая ниже статья.

В этой статье мы рассказываем, как решить волшебный кубик — знаменитую головоломку Э. Рубика*). Строго говоря, алгоритма решения (то есть набора точных правил для приведения раскраски всех граней из произвольной к одноцветной) мы здесь не приводим — такой алгоритм уже был опубликован в «Кванте» (1980, № 12, с. 17). Вместо этого мы даем большой список полезных комбинаций, указывая для каждой способ выполнения (последовательность поворотов) и результат (какие маленькие кубики переставляются и как). Из различных комбинаций, приводящих к одному и тому же результату, мы старались выбрать самую короткую. В конце статьи мы показываем, что волшебный кубик можно привести в начальное состояние (с одноцветными гранями) за 79 поворотов или меньше.

*) Если у вас нет экземпляра кубика, вы можете его сконструировать, пользуясь указаниями статьи М. Евграфова в «Кванте» 1982, № 3.

Обозначение операций

Обозначим каждую грань волшебного кубика: *Ф* (фасад), *Т* (тыл), *В* (верх), *Н* (низ), *П* (правая), *Л* (левая) (см. рис.). Поворот грани *X* на $n \cdot 90°$ по часовой стрелке будем обозначать через X^n, например повороты правой грани на 90°, 180°, 270° записываются, как $П$, $П^2$, $П^{-1}=П^3$. Таким образом каждой операции (цепочке поворотов граней) отвечает «слово» из букв *Ф, Т, В, Н, П, Л* со степенями*), читаемое и выполняемое слева направо.

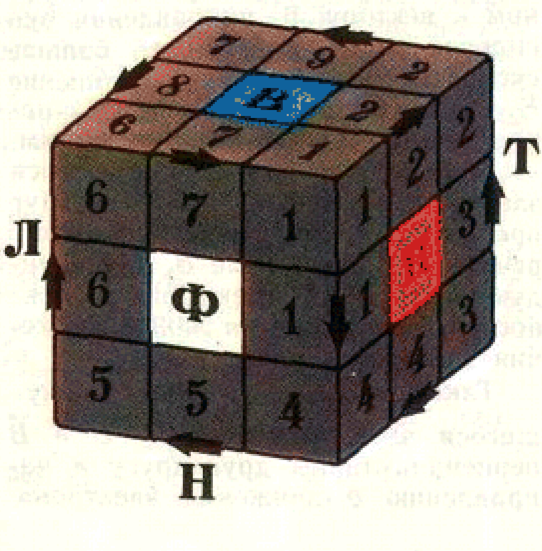
Обозначение результата операции

Мы будем записывать в единой формуле как передвижение маленьких кубиков, так и изменение их ориентации в пространстве.

Для записи передвижений маленьких кубиков перенумеруем угловые кубики и соответствующие вершины числами от 1 до 8, средние (и соответствующие ребра) — числами от 1 до 12 (см. рисунок; записи всех рассматриваемых в статье операций относятся к нумерации, показанной на этом рисунке).

Допустим, что в результате операции *F* первый угловой кубик перешел на место i_1-го, i_1-й — на место i_2-го и т. д. Каждый раз в этой цепочке будет появляться новый номер и неизбежно наступит момент, когда

*) Забавный способ запоминания таких «слов» приводится в статье «Венгерский кубик» в журнале «Наука и жизнь», № 3 за 1981 г. (с. 131).



кубик с номером i_{n_1} вернется на место первого (почему?). Кубики $1, i_1, ..., i_{n_1}$ образуют в операции F *цикл,* обозначаемый $(1 i_1 \dots i_{n_1})$. Если еще не все угловые кубики вошли в этот цикл ($n_1 < 7$), то берем любой из оставшихся (пусть его номер i_{n_1+1}) и повторяем тот же процесс — возникнет второй цикл $(i_{n_1+1} \dots i_{n_2})$. В конце концов запись угловых кубиков окажется разложенной на *независимые* (то есть не имеющие общих элементов) циклы: $(1 i_1 \dots i_{n_1}) \cdot (i_{n_1+1} \dots i_{n_2}) \dots$

Аналогично обстоит дело со средними кубиками. Соответствующие циклы мы будем записывать в квадратных скобках; так, запись [2 7 6] означает, что второй средний кубик перешел в седьмой, седьмой — в шестой, шестой — во второй.

Пусть в результате некоторой операции i-й средний кубик занял место j-го. Он может расположиться на этом месте двумя способами. Если направление стрелки, привязанной к его ребру (см. рис. 1), окажется противоположным направлению стрелки j-го кубика, то в соответствующем цикле после номера i поставим знак минус. Отсутствие знака означает, что направления стрелок совпали. Так, запись $[2^- 7^+ 6^-]$ (или $[2^- 7\ 6^-]$, «плюсики» мы обычно опускаем для средних кубиков) означает, что второй средний кубик перешел в седьмой с противоположными стрелками, седьмой в шестой с совпадающими стрелками, шестой во второй с противоположными стрелками. Запись $[2^-]$ означает, что второй средний кубик остался на месте, но повернулся на 180°.

Угловой кубик может расположиться на новом месте тремя способами. Соответственно в записи цикла после номера этого кубика будем ставить знак +, знак — или ничего не писать. Знак не пишется, если горизонтальная грань данного углового кубика и после выполнения операции остается горизонтальной. В противном случае, чтобы привести эту грань на новом месте в горизонтальное положение, нам пришлось бы повернуть кубик вокруг диагонали на 120°. Если поворот должен производиться против часовой стрелки, ставим +, если по часовой стрелке — ставим —. Скажем, записи (5^+), (5), (5^-) означают, что пятый кубик остается на месте, но поворачивается на 120°, 0°, 240° по часовой стрелке соответственно.

Пояснения к таблице *(см. с. 24)*

Записывая операцию, мы будем сначала писать последовательность поворотов (слово из букв *Ф, Т, В, Н, П, Л* со степенями), затем знак $\sim$, а потом результат, записанный в виде циклов со знаками. Освоить эту систему записи вам помогут примеры; проверьте, что $П \sim (1^+ 2^- 3^+ 4^-)$ $[1234]$, $В^- \sim (1276)\ [2^- 9^- 8^- 7^-]$, $Ф^2 \sim (15)\ (46)\ [16]\ [57]$, $ПФ \sim (1^+ 2^- 3^- 5^- 6^+)\ (4^+)\ [1234567]$, $П^2 Ф^2 \sim (135)\ (264)\ [136]\ [24]\ [57]$.

В таблице приводится 47 операций, найденных при игре в кубик, иногда методом проб и ошибок, но большей частью с помощью довольно интересных алгебраических рассуждений, которые недостаток места не позволяет воспроизвести здесь. Операции C_{15} и C_{19} заимствованы из «Венгерского среднешкольного журнала», C_{18} — из упомянутой выше статьи в «Науке и жизни».

Схема алгоритма

Первый этап: сборка «столбика» $2 \times 2 \times 3$. Назовем «столбиком» совокупность всех маленьких кубиков, не лежащих в двух смежных гранях большого куба, для определенности — *Ф* и *П*. Для правильной расстановки всех кубиков в «столбике» особых хитростей не требуется. Приведем, например, операции, при которых 1-й средний кубик переходит на 8-е место и в одном случае сохраняет, а в другом меняет свой угол поворота, причем все кубики «столбика», кроме, конечно, 8-го, остаются нетронутыми: $A_1 = ПТВ^2Т^{-1}$, $A_2 = Ф^{-1}ТВТ^{-1}$. Этот этап удается выполнить примерно за 25 ходов.

Второй этап: разворачивание средних кубиков в гранях Ф и П. Легко показать, что при любой последовательности поворотов число средних кубиков, у которых направления стрелок не совпадают с «правильным» (показанным на рисунке), всегда

Таблица полезных операций

Название, описание и результат операции	Число ходов
1) *Перестановки средних кубиков:*	
а) *3-циклы*	
$C_1 = Ф^{-1}П^{-1}ФП \sim [125] \cdot (1^{+}2)(45^{-})$	4
$C_2 = Ф^2П^{-1}Ф^2П \sim [126]\cdot(1^{+}2^{-}5^{-}64^{+})$	4
$C_3 = ФП^{-1}Ф^{-1}П \sim [127]\cdot(1^{-}4^{-})(2^{+}6^{+})$	4
$C_4 = Ф^2П^2Ф^2П^2 \sim [136]\cdot(135)(264)$	4
$C_5 = П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^2 \sim [235]\cdot(1^{+}5^{+})(2^{-}3^{-})$	5
$C_6 = П^{-1}Ф^2П^{-1}Ф^2П^2 \sim [236]\cdot(1^{+}2^{-}35^{+}6^{-})$	5
$C_7 = П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2 \sim [237]\cdot(1^{+}2)(3^{-}6)$	5
$C_8 = П^{-1}Ф^{-1}П^2ФП^{-1} \sim [245]\cdot(1243^{-}5^{+})$	5
$C_9 = П^{-1}Ф^2П^2Ф^2П^{-1} \sim [246]\cdot(13^{+}6^{-})(24^{-}5^{+})$	5
$C_{10} = Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф \sim [123]\cdot(1^{-}3)(2^{-}4^{-})$	7
б) *2-циклы*	
$C_{11} = П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф \sim [14](12^{+}34^{-})$	8
$C_{12} = ПНТП^2Т^{-1}П^2Н^{-1} \sim [12][3^{-}][4^{-}](24^{+}3)(1^{+}5^{+})$	7
в) *поворот средних кубиков*	
$C_{13} = ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1} \sim [1^{-}][2^{-}](1^{-}2^{-})(46^{-})$	8
г) *перестановки средних кубиков, не сдвигающие угловых*	
$C_{14} = П^2НВ^{-1}Ф^2ВН^{-1} \sim [136]$	6
$C_{15} = ВПТЛФВ^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}П^{-1} \sim [1^{-}2^{-}7]$	10
$C_{16} = ПВН^{-1}Ф^{-1}НВ^{-1} \sim [1^{-}6^{-}24^{-}3]$	6
$C_{17} = (П^2Ф^2)^3 \sim [24]\,[57]$	6
$C_{18} = П^2Ф^2П^2Ф^2 \cdot ПВ^{-1}П^2ВФ \cdot ПВФ^2В^{-1}Ф \sim [2^{-}][7^{-}]$	14
$C_{19} = П^{-1}ВПТЛФВ^{-1}ПВ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}В \sim [2^{-}][7^{-}]$	14
2) *Перестановки угловых кубиков, не сдвигающие средних*	
а) *3-циклы*	
$У_1 = ВЛВ^{-1} \cdot П^{-1} \cdot ВЛ^{-1}В^{-1} \cdot П \sim (1^{+}2^{+}6^{+})$	8
$У_2 = Л^{-1}ТЛ \cdot Ф^{-1} \cdot Л^{-1}Т^{-1}Л \cdot Ф \sim (12^{-}6^{+})$	8
$У_3 = Ф^2П^2Ф \cdot Л \cdot Ф^{-1}П^2Ф \cdot Л^{-1}Ф \sim (126)$	9
$У_4 = Л^2Т^2Л^{-1} \cdot Ф^2 \cdot ЛТ^2Л^{-1} \cdot Ф^2Л^{-1} \sim (1^{+}26^{-})$	9
$У_5 = ПВ^2П \cdot Н \cdot П^{-1}В^2П \cdot Н^{-1}П^2 \sim (12^{+}6^{-})$	9
$У_6 = Л^{-1}ТВ^2Т^{-1}ЛТЛ^{-1}В^2ЛТ^{-1} \sim (1^{-}2^{-}6^{-})$	10
$У_7 = П^{-1}Т^2П \cdot Ф \cdot П^{-1}Т^2П \cdot Ф^{-1} \sim (1^{+}7^{+}4^{+})$	8
$У_8 = ФНФ^{-1} \cdot В^2 \cdot ФН^{-1}Ф^{-1} \cdot В^2 \sim (17^{+}4^{-})$	8
$У_9 = Ф^{-1} \cdot ПТ^{-1}П^{-1} \cdot Ф \cdot ПТП^{-1} \sim (1^{-}74^{+})$	8
$У_{10} = Н^2Л^{-1}Н^{-1}П^2НЛН^{-1}П^2Н^{-1} \sim (1^{-}7^{+}4)$	9
$У_{11} = Т^{-1}НТ^{-1}П^2ТН^{-1}Т^{-1}НП^2Н^{-1}Т^2 \sim (174)$	11
$У_{12} = П^2Н^{-1}ЛНП^2Н^{-1}Л^{-1}Н \sim (2^{+}4^{-}6)$	8
$У_{13} = В^{-1}У_7В \sim (2^{+}4^{+}6^{+})$	10
$У_{14} = В^{-1}У_{10}В \sim (246)$	11
б) *разворачивание угловых кубиков*	
$У_{15} = (ПФ^{-1}Н^2ФП^{-1}В^2)^2 \sim (2^{-})(6^{+})$	12
$У'_{15} = П^{-1}У_{15}П \sim (6^{+})(3^{-})$	14
$У''_{15} = ПУ_{15}П^{-1} \sim (1^{-})(6^{+})$	14
$У_{16} = У_9^{-1} \cdot У_8 = ПТ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}ПТП^{-1}Ф^2НФ^{-1}В^2ФН^{-1}Ф^{-1}В^2 \sim (1^{+})(4^{+})(7^{+})$	15
$У'_{16} = П^{-1}У_{16}П \sim (1^{+})(2^{+})(7^{+})$	15
$У''_{16} = FУ_{16}F^{-1} \sim (1^{+})(3^{+})(7^{+})$, здесь $F = ФН^{-1}Ф^{-1}В^2$	15
$У_{17} = (C_{13})^2 = (ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1})^2 \sim (1^{+})(2^{+})(4^{-})(6^{-})$	16
$У_{18} = (C_3C_2)^2 = (ФП^{-1}Ф^{-1}ПФ^2П^{-1}Ф^2П)^2 \sim (1^{-})(2^{+})(4^{+})(5^{+})(6^{+})$	16
в) *3-циклы с разворачиванием*	
$У_{19} = Л^{-1}ТВ^2Т^{-1}ЛН^2ТЛ^{-1}В^2ЛТ^{-1}Н^2 \sim (1^{-}2^{-}7^{-})(3^{-})(5^{+})$	12
$У_{20} = (C_{12})^2 = (ПНТП^2Т^{-1}П^2Н^{-1})^2 \sim (2^{+}34^{+})(1^{-})(5^{-})$	14
г) *пары 2-циклов*	
$У_{21} = (C_1)^3 = (Ф^{-1}П^{-1}ФП)^3 \sim (1^{-}2^{+})(4^{-}5^{+})$	12
$У_{22} = (C_3)^3 = (ФП^{-1}Ф^{-1}П)^3 \sim (14)(26)$	12
$У_{23} = C_{17}П^{-1} = (Ф^2П^2)^2Ф^2П(Ф^2П^2)^2Ф^2П \sim (13)(24)$	12
$У_{24} = (C_{11})^2 = (П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф)^2 \sim (1^{+}3^{-})(2^{+}4^{-})$	16

четно. Поэтому после первого этапа в гранях $Ф$ и $П$ может находиться 2, 4 или 6 таких кубиков. Операция $A_3 = НП^{4-n}Н^{-1}$ $(n = 1, 2, 3)$ «исправляет стрелки» у двух кубиков — 5-го и n-го, а операция $A_4 = НВ^{-1}ПВН^{-1}$ — у четырех (1-, 3-, 5- и 7-го), при этом все кубики «столбика» остаются на местах. Применяя операции типа A_3 и A_4, мы добиваемся того, что стрелки всех средних кубиков будут направлены правильно. Для этого нужно не более 8 ходов.

Третий этап: расстановка средних кубиков. На этом этапе будут поворачиваться только грани Φ и Π, поэтому «столбик» и правильные направления стрелок средних кубиков автоматически сохраняются. Можно доказать (это легко сделает каждый, кто знаком с понятием перестановки), что необходимое для этого передвижение 7 средних кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3 и, возможно еще одного поворота; следовательно, 7 средних кубиков граней Φ и Π можно правильно расставить, использовав не более трех операций типа C_1—C_{10}. Более подробный анализ показывает, что этот этап требует не более 14 ходов.

Четвертый этап: расстановка и разворачивание угловых кубиков. Нам осталось расставить и правильно развернуть 6 угловых кубиков граней Φ и Π. Как выше, можно установить, что необходимое передвижение 6 угловых кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3, поэтому для правильной расстановки 6 угловых кубиков нам потребуется не более трех операций типа Y_1—Y_{14}. После этого можно, применяя операции Y_{15}—Y_{18}, правильно повернуть все кубики. Действительно, повернув два кубика с помощью Y_{16}, мы всегда можем уменьшить число неправильно развернутых кубиков на 1 или 2, пока оно больше двух. Когда же останется два таких кубика, они окажутся повернуты в противоположные стороны, и их правильный разворот достигается снова с помощью Y_{16}, Y'_{16} или Y''_{16}. Гораздо рациональнее, пользуясь нашим богатым запасом 3-циклов угловых кубиков, расставлять и разворачивать их одновременно: среди операций, осуществляющих перестановку данных трех кубиков, всегда можно выбрать одну так, чтобы два из них повернулись на нужные нам углы. Не вдаваясь в детали, отметим, что для 4-го этапа хватает 32 ходов и это число наверняка может быть уменьшено.

Итак, общее число ходов в предлагаемом алгоритме теоретически не превосходит 79, но на практике оно оказывается меньше — около 70.

В одном из следующих номеров журнала мы глубже познакомимся с математикой волшебного кубика. Это позволит нам полностью обосновать приведенный выше алгоритм и рассказать о рекордно коротком (по имеющемся данным) алгоритме — на 52 хода.